



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014**

**CLASA a VIII-a**

**Problema 1.** În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = 12\sqrt{3}$  cm și  $AA' = 18$  cm, se consideră punctele  $P \in [AA']$  și  $N \in [A'B']$  astfel încât  $A'N = 3B'N$ .

Determinați lungimea segmentului  $[AP]$  astfel încât, pentru orice punct  $M \in [BC]$ , triunghiul  $MNP$  să fie dreptunghic în  $N$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Pentru fiecare număr natural nenul  $a$  se notează cu  $p(a)$  cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu  $a$ .

a) Determinați numărul perechilor de numere naturale nenule  $(m, n)$ , cu  $m \leq n$ , pentru care

$$p(2m - 1) \cdot p(2n - 1) = 400.$$

b) Determinați mulțimea  $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 100 \text{ și } \frac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$ .

**Problema 3.** În vârful  $A$  al hexagonului regulat  $ABCDEF$  de latură  $a$  se ridică perpendiculara  $AS = 2a\sqrt{3}$  pe planul hexagonului. Punctele  $M, N, P, Q$ , respectiv  $R$  sunt proiecțiile punctului  $A$  pe dreptele  $SB, SC, SD, SE$ , respectiv  $SF$ .

a) Demonstrați că punctele  $M, N, P, Q, R$  sunt coplanare.

b) Determinați măsura unghiului format de planele  $(MNP)$  și  $(ABC)$ .

**Problema 4.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + \dots + [x_n - x_{n-1}],$$

unde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale cu partea întreagă 1, 2, ...,  $n$ .

Prin  $[x]$  se notează partea întreagă a numărului real  $x$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*